

2018年都市教養（理系）第3問

3 以下の問いに答えなさい。

(1) 正の整数 p , q , f および整数 r が次の関係をみたしているとする。

$$p = fq + r$$

ただし, $0 \leq r < q$ とする. このとき整数 d が p と q の公約数であることと, d が q と r の公約数であることは同値であることを示しなさい.

(2) 正の整数 k , m の最大公約数を $\gcd(k, m)$ で表す. p , q を $p > q$ をみたす正の整数とする. また, $n \geq 2$ とし, $2n - 1$ 個の正の整数 $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$ が次の関係をみたしているとする.

$$p = r_1$$

$$q = r_2$$

$$r_1 = f_1 r_2 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

$$r_2 = f_2 r_3 + r_4, \quad r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = f_{n-2} r_{n-1} + r_n, \quad r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = f_{n-1} r_n$$

このとき, $\gcd(p, q) = \gcd(r_j, r_{j+1})$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) が成り立つことを j に関する数学的帰納法で示しなさい.

(3) p と q を互いに素な正の整数とする. このとき, $ap + bq = 1$ をみたす整数 a , b が存在することを示しなさい.