電気通信大学

2012年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a を正の定数とし，次のように定められた2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = a, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{4}{a_n}\right) & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n + 2} & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ．

(2) b_{n+1} を a_n を用いて表せ．さらに，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3) b_3，b_4 をそれぞれ b_1 を用いて表せ．さらに，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n と b_1 を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n と b_1 を用いて表せ．

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $b_1 = \dfrac{a-2}{a+2}$ $\quad\therefore\ 1 - b_1 = 1 - \dfrac{a-2}{a+2} = \dfrac{4}{a+2} > 0$ （$\because a>0$ より）

$\therefore\ b_1 < 1$ また，$b_1 - (-1) = \dfrac{a-2}{a+2} + 1 = \dfrac{2a}{a+2} > 0$ （$\because a>0$ より）

$\therefore\ b_1 > -1$ 以上より，$-1 < b_1 < 1$ ■

(2) $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+2} = \dfrac{\frac{1}{2}(a_n+\frac{4}{a_n})-2}{\frac{1}{2}(a_n+\frac{4}{a_n})+2} = \dfrac{(a_n-2)^2}{(a_n+2)^2} = \underline{\left(\dfrac{a_n-2}{a_n+2}\right)^2}$ //

$\therefore\ \underline{b_{n+1} = (b_n)^2}$ //

(3) (2)より，$b_2 = (b_1)^2$，$\underline{b_3 = (b_2)^2 = \{(b_1)^2\}^2 = (b_1)^4}$ //

$b_4 = (b_3)^2 = \{(b_1)^4\}^2 = \underline{(b_1)^8}$ // 同様にして，$\underline{b_n = (b_1)^{2^{n-1}}}$ //

(4) (3)より，$(b_1)^{2^{n-1}} = \dfrac{a_n-2}{a_n+2}$ これを a_n について解くと

$\underline{a_n = -\dfrac{2\{(b_1)^{2^{n-1}}+1\}}{(b_1)^{2^{n-1}}-1}}$ //

(5) $-1 < b_1 < 1$ より $n \to \infty$ のとき $(b_1)^{2^{n-1}} \to 0$

$\therefore\ \underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2}$ //