一橋大学

2015年 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ n を 2 以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

(1) $1024=2^{10}$ より．

正の整数 k に対して．k と $n=1024$ の最大公約数は．$\begin{cases} 1 & (k:\text{奇数のとき}) \\ 2\text{以上} & (k:\text{偶数のとき}) \end{cases}$

ポイント：求めるのは．奇数の個数！

よって．$E(1024)=\dfrac{1024}{2}=\underline{512}$ //

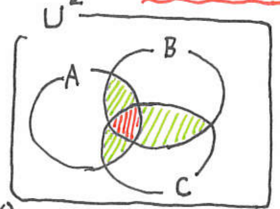
(2) $2015=5\cdot13\cdot31$ より．

求めるのは．1 から 2015 までの整数のうち．5でも13でも31でも割り切れないものの個数．

集合 A, B, C をそれぞれ 5の倍数，13の倍数，31の倍数の集合とするとき．

求めるものは．$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ であり．図より．

1から2015までの整数の集合．



緑の部分は2つが重なっている

赤の 〃 3つが 〃

$$\underbrace{n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})}_{=E(2015)} = n(U)-n(A\cup B\cup C)$$

$$= 2015-\{n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B) -n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\}\cdots(*)$$

ここで，$n(A)=403$，$n(B)=155$，$n(C)=65$，

$n(A\cap B)=31$，$n(A\cap C)=13$，$n(B\cap C)=5$，$n(A\cap B\cap C)=1$

であるから $(*)$ に代入して．

$$E(2015)=2015-(403+155+65-31-13-5+1)$$

$$=\underline{1440}\ //$$

2枚目 につづく

2015年 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ n を2以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が1となるものの個数を $E(n)$ で表す．たとえば

$$E(2)=1,\quad E(3)=2,\quad E(4)=2,\quad \cdots,\quad E(10)=4,\quad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

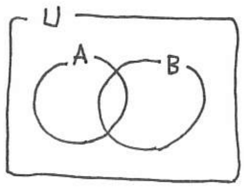
(2) $E(2015)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) と同じようにして考える．

Aを1以上 n以下の整数で，pで割り切れるものの集合，

Bを 〃 qで 〃 とすると．



$$E(n) = n - \{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$$

$$= n-(p^{m-1}q^m + p^mq^{m-1} - p^{m-1}q^{m-1})$$

いきなり，こう変形してもよかった

$$= n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}-\frac{n}{pq}\right)$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}\right)$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

$\therefore\ \dfrac{E(n)}{n} = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ これが最小となるのは，$(p,q)=(2,3)$ または $(3,2)$

よって，$\dfrac{E(n)}{n} \geqq \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$ ■