2016年 理系 第1問

$\boxed{1}$ a と b を $0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b < 1$ をみたす定数とする．数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}({a_n}^2 + b) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$c = 1 - \sqrt{1-b}$ とおく．以下の問いに答えなさい．

(1) $0 \leqq a_n \leqq 1$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $a_{n+1} - c = \dfrac{1}{2}(a_n + c)(a_n - c)$ が成り立つことを示しなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = c$ が成り立つことを示しなさい．