0002221458777999

首都大学東京

2016年 理系 第2問

$\boxed{2}$ $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ は次の等式をみたすとする.

$$f(x) = 2x - \tan x + \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt$$

以下の問いに答えなさい.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めなさい.

(2) $f(0)$ の値を求めなさい.

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx$

$\displaystyle = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$= \underline{x\sin x + \cos x + C}$ （C は積分定数）//

(2) $f(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(t)\cos t\,dt$ これを a で表すと, $f(x) = 2x - \tan x + a$

$\therefore\ a = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t - \tan t + a)\cos t\,dt$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2t\cos t - \sin t + a\cos t\,dt$

$= \Big[2t\sin t + 2\cos t + \cos t + a\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$ ←(1)を使った

$= \dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{a}{2} - 2 - 1$

$= \dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 3$

$\therefore\ f(0) = a = \underline{\dfrac{\pi}{3} + 3\sqrt{3} - 6}$ //

(3) $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$

$\therefore$ $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x) = 0$ となるのは, $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$\therefore$ 増減表より. 最大値は $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 + f(0) = \underline{\dfrac{5\pi}{6} + 3\sqrt{3} - 7}$ //