首都大学東京

2018年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 空間において，点Oを中心とする半径1の球面上に3点A，B，Cをとる．ただし，4点O，A，B，Cは同一平面上にはないとする．3点O，A，Cが定める平面OACと平面OABのなす角をαとし，平面OABと平面OBCのなす角をβとし，さらに平面OBCと平面OACのなす角をγとする．また，$a = \angle\mathrm{BOC}$，$b = \angle\mathrm{COA}$，$c = \angle\mathrm{AOB}$とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 平面OAB上に点Pを，直線CPが平面OABと直交するようにとる．また，直線OA上に点Fを，直線PFが直線OAと直交するようにとる．直線OAと直線CFが直交することを示しなさい．

(2) 四面体OABCの体積を$\sin b$，$\sin c$および$\sin\alpha$を用いて表しなさい．

(3) 以下の等式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$