2011 年 都市教養（文系） 第 4 問

4 数列 $\{a_n\}$ が次の式によって与えられているとする．

$$a_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して，それぞれ $2(n+1)a_n$ の値を求めなさい．

(2) $a_n$ の一般項を推定し，推定した式がすべての自然数 $n$ に対して正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(3) $a_n > \frac{1}{2} + \frac{100}{n^2}$ をみたす最小の $n$ を求めなさい．