

2018年都市教養（理系）第3問

3 以下の問いに答えなさい。

(1) 正の整数  $p, q, f$  および整数  $r$  が次の関係をみたしているとする。

$$p = fq + r$$

ただし、 $0 \leq r < q$  とする。このとき整数  $d$  が  $p$  と  $q$  の公約数であることと、 $d$  が  $q$  と  $r$  の公約数であることは同値であることを示しなさい。

(2) 正の整数  $k, m$  の最大公約数を  $\gcd(k, m)$  で表す。  $p, q$  を  $p > q$  をみたす正の整数とする。また、 $n \geq 2$  とし、 $2n - 1$  個の正の整数  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, r_1, r_2, \dots, r_n$  が次の関係をみたしているとする。

$$p = r_1$$

$$q = r_2$$

$$r_1 = f_1 r_2 + r_3, \quad r_3 < r_2$$

$$r_2 = f_2 r_3 + r_4, \quad r_4 < r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-2} = f_{n-2} r_{n-1} + r_n, \quad r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = f_{n-1} r_n$$

このとき、 $\gcd(p, q) = \gcd(r_j, r_{j+1})$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ) が成り立つことを  $j$  に関する数学的帰納法で示しなさい。

(3)  $p$  と  $q$  を互いに素な正の整数とする。このとき、 $ap + bq = 1$  をみたす整数  $a, b$  が存在することを示しなさい。