0002016183897999

徳島大学

2015年 理系 第3問

数理 石井K

3 座標空間において O(0, 0, 0), A(3, −3, 6), B(−1, 1, 2) とし，線分 AB を OA : OB に内分する点を C とする．さらに，$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CD}$, $OD = 3\sqrt{3}$ を満たす点を D とする．

(1) $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ を求めよ．

(2) 四面体 OABD の体積を求めよ．

(1) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3^2+(-3)^2+6^2} = 3\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$ より．

$OA : OB = 3 : 1$

$\therefore \overrightarrow{OC} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+1} = \underline{(0, 0, 3)}$ //

$\overrightarrow{OD} = (x, y, z)$ とおくと，$\overrightarrow{CD} = (x, y, z-3)$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ より．$3x - 3y + 6z - 18 = 0$　$\therefore x - y + 2z = 6$ …①

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ より，$-x + y + 2z - 6 = 0$　$\therefore -x + y + 2z = 6$ …②

①＋② より．$z = 3$　このとき $z = 3$ を ① に代入して．$x = y$

また，$|\overrightarrow{OD}| = 3\sqrt{3}$ より．$|\overrightarrow{OD}|^2 = 27$　$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 27$

$\therefore 2x^2 = 18$　$\therefore x = y = \pm 3$　$\therefore \underline{\overrightarrow{OD} = (\pm 3, \pm 3, 3)\ (複号同順)}$ //

(2) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CD}$ より．$\overrightarrow{CD}$ は $\triangle OAB$ に対して垂直であるから

$(四面体 OABD の体積) = \dfrac{1}{3} \times \triangle OAB \times CD$

ここで $\triangle OAB = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -3-3+12 = 6$ より

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{54\cdot 6 - 6^2} = 6\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore V = \dfrac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = \underline{12}$ //