



2012年 医学部 第3問

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}$ は次の条件 (ア), (イ) を満たしているとする.

(ア) $A^2 + A + E = O$

(イ) $B^2 = E$

ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(1) x, y, z, w がすべて整数で $x < yw$ を満たすとき, x, y, z, w を求めよ.

(2) (1) で求めた x, y, z, w に対して, ベクトル $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める.

- $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ が決まったとき, 硬貨を投げて表が出れば $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, 裏が出れば $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ とする.

(a) $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ のいずれかであることを示せ.

(b) $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる確率を X_n , $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる確率を Y_n , $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる確率を Z_n とするとき, $X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}$ をそれぞれ Y_n を用いて表せ. また, X_n を n を用いて表せ.