福岡教育大学

2010年 初等教育 第4問

$\boxed{4}$ 空間上に相異なる4点O，A，B，Cがあり，線分OA，OB，OCは互いに直交している．次の問いに答えよ．

(1) 4点O，A，B，Cからの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する．この点をGとする．線分OAの中点をMとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{MG}}$が直交することを用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$の内積とする．

(2) (1)を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$，$\mathrm{R}\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$とする．このとき線分OP，OQ，ORは互いに直交していることを示せ．また，4点O，P，Q，Rを通る球面の半径を求めよ．