0001865544318999

和歌山大学

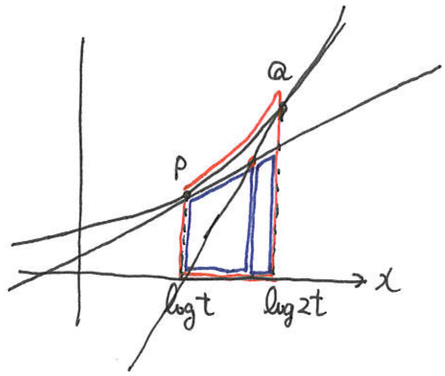
2014年 第4問

数理 石井K

4 曲線 $C: y = e^x$ 上の点P，Qにおける接線をそれぞれ ℓ，m とする．P，Qの x 座標をそれぞれ $\log t$，$\log 2t$ とし，曲線 C と直線 ℓ，m で囲まれた部分の面積を S とする．また，ℓ，m の傾きをそれぞれ $\tan\alpha$，$\tan\beta$ とする．ただし，$t>0$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\tan\alpha$，$\tan\beta$ および S をそれぞれ t を用いて表せ．

(2) $\beta-\alpha$ が最大となるときの t の値を求めよ．



ℓ と m の交点を求めると，

$(2\log 2t - \log t - 1,\ 2t\log 2t - 2t\log t)$

(1) $\ell : y = e^{\log t}(x - \log t) + t$

$\therefore y = tx - t\log t + t$

$m : y = e^{\log 2t}(x - \log 2t) + 2t$

$\therefore y = 2tx - 2t\log 2t + 2t$

$\therefore \underline{\tan\alpha = t,\ \tan\beta = 2t}$ //

$S = \int_{\log t}^{\log 2t} e^x\,dx - (\text{青色の台形 2つ})$

$= t - \frac{1}{2}(2t\log 2t - 2t\log t + t) \times (2\log 2t - 2\log t - 1)$

$\quad - \frac{1}{2}(2t\log 2t - 2t\log t + 2t) \times (-\log 2t + \log t + 1)$

$= \underline{\frac{t}{2} - t(\log 2)^2}$ //

(2) $\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{t}{1+2t^2}$

$0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ より．$\beta-\alpha$ が最大 $\Leftrightarrow$ $\tan(\beta-\alpha)$ が最大

$\therefore \tan(\beta-\alpha) = \dfrac{1}{\frac{1}{t} + 2t} \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot 2t}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$t>0$ より．相加・相乗平均の関係を使った

等号成立は $\frac{1}{t} = 2t$ すなわち $\underline{t = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ // のとき．