2014年 理（数理科学）· 医 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

4 関数

$$f(x)=\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt-\left|\int_0^x (t-1)(t-2)\,dt\right|$$

に対して，$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフをかきなさい．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

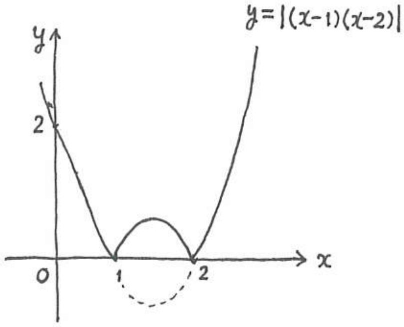
$$\left|\int_0^x (t-1)(t-2)\,dt\right| = \left|\int_0^x t^2-3t+2\,dt\right|$$
$$=\left|\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^x\right|$$
$$=\left|\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right|$$
$$=\left|\frac{x}{3}\left(x^2-\frac{9}{2}x+6\right)\right|$$
$$=\left|\frac{x}{3}\left\{\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right\}\right|$$

$x>0$, $\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0$ より

$$=\frac{x}{3}\left\{\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right\}$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x \quad \cdots ①$$

次に $\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt$ を考える．

右図から



(i) $0<x\leqq 1$ のとき．$(x-1)(x-2)\geqq 0$ なので

$$\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt=\int_0^x (t-1)(t-2)\,dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^x$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x$$

(i)の結果に $x=1$ を代入すると速い!

(ii) $1<x\leqq 2$ のとき．$(x-1)(x-2)\leqq 0$ なので

$$\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt=\boxed{\int_0^1 (t-1)(t-2)\,dt}+\int_1^x -(t-1)(t-2)\,dt$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^x$$
$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{5}{3}$$

2014年 理（数理科学）・医 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

4 関数

$$f(x)=\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt-\left|\int_0^x (t-1)(t-2)\,dt\right|$$

に対して，$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフをかきなさい．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(iii) $x>2$ のとき，$(x-1)(x-2)>0$ なので

(ii)の結果に $x=2$ を代入すると速い！

$$\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt = \boxed{\int_0^1 (t-1)(t-2)\,dt+\int_1^2 -(t-1)(t-2)\,dt}+\int_2^x (t-1)(t-2)\,dt$$

$$=-\frac{8}{3}+6-4+\frac{5}{3}+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^x$$

$$=1+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{8}{3}+6-4$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{3}$$

(i)〜(iii)より，

$$\int_0^x |(t-1)(t-2)|\,dt=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x & (0<x\leqq 1)\\[2mm] -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{5}{3} & (1<x\leqq 2)\\[2mm] \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x+\dfrac{1}{3} & (x>2)\end{cases}\quad\cdots ②$$

①，②より，

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0<x\leqq 1)\\[2mm] -\dfrac{2}{3}x^3+3x^2-4x+\dfrac{5}{3} & (1<x\leqq 2)\\[2mm] \dfrac{1}{3} & (x>2)\end{cases}$$

$g(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+3x^2-4x+\dfrac{5}{3}$ $(1<x\leqq 2)$ とおくと，

$$g'(x)=-2x^2+6x-4$$

$$=-2(x-1)(x-2)$$

$$\geqq 0 \quad (\because 1<x\leqq 2 \text{ より})$$

∴ $g(x)$ は $1<x\leqq 2$ において単調増加であり

$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフは右のようになる．