崇城大学

2015年 薬学部（2日目）第1問　　1/2枚目　　増田

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) 6枚のカード $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が入った袋から，同時に4枚のカードを取り出す．ただし，同じ数字が書かれたカードは区別しないものとする．

(ｉ) 取り出し方は何通りあるか．

(ii) 取り出したカードを並べて4桁の整数を作るとき，3300より大きい整数はいくつできるか．

(2) 次の各問に答えよ．

(ｉ) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\cos\theta + \sin\theta$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ．

(ii) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ とする．x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき，$x^2 + 2xy - y^2$ の最大値とそのときの x, y の値を求めよ．

(1)(i) ① $\boxed{2}$ を一枚も取り出さない

$\Rightarrow$ 1通り

② $\boxed{2}$ を一枚取り出す

(1, 3, 4)
(1, 3, 3) $\Rightarrow$ 3通り
(3, 3, 4)

③ $\boxed{2}$ を二枚取り出す

残り2枚は (1, 3), (1, 4)
(3, 3), (3, 4) $\Rightarrow$ 4通り

全部で $1+3+4=$ 8通り

(ii)

千　百　十　一

3 — 3 — 1 < 2, 4
　　　　2 < 1, 2, 4
　　　　4 < 1, 2

3 — 4 — 1 < 2, 3
　　　　2 < 1, 2, 3
　　　　3 < 1, 2

千の位に3がきて、3300より大きい整数は 14通り。

千の位が4である数字は

残り3つの数字が (1, 2, 3) → 6通り
(1, 2, 2) → 3通り
(1, 3, 3) → 3 〃
(2, 2, 3) → 3 〃
(2, 3, 3) → 3 〃

合計 18通り

$14+18=32$　　32個

(2)(i) $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$

最大値は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ つまり $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、$\sqrt{2}$

最小値は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$ つまり $\theta = \pi$ のとき、-1

(ii) $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と書きかえることができる。

このとき、

$$x^2 + 2xy - y^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \cos 2\theta + \sin 2\theta$$

つづく

2015年 薬学部（2日目） 第1問　　2/2枚目　　増田

1　次の各問に答えよ．

(1) 6枚のカード 1, 2, 2, 3, 3, 4 が入った袋から，同時に4枚のカードを取り出す．ただし，同じ数字が書かれたカードは区別しないものとする．

（i）取り出し方は何通りあるか．

（ii）取り出したカードを並べて4桁の整数を作るとき，3300より大きい整数はいくつできるか．

(2) 次の各問に答えよ．

（i）$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\cos\theta + \sin\theta$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ．

（ii）$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とする．x，y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき，$x^2 + 2xy - y^2$ の最大値とそのときの x，y の値を求めよ．

(2)(ii) つづき

$$x^2 + 2xy - y^2 = \cos 2\theta + \sin 2\theta$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$ となり，

(2)(i) の場合と一致する．

最大値は $\sqrt{2}$

$2\theta = \frac{\pi}{4}$ より $x = \cos\frac{\pi}{8}$，$y = \sin\frac{\pi}{8}$ のとき．

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{8} \times 2\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$ だから，

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

よって 最大値を与える x，y は

$$x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$