0002346723567999

崇城大学

2016年 薬学部（1日目）第2問

増田

$\boxed{2}$ 曲線C：$y=2x^3-2x+1$がある．次の各問に答えよ．

(1) 曲線Cの接線が点$(1,\ 1)$を通るとき，その接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線C上に異なる2点P，Qがあり，2点P，Qにおける接線がともに直線PQに直交しているとき，2点P，Qの座標を求めよ．ただし，点Pのx座標は負とする．

(1) 曲線C上の接点の座標を

$(t,\ 2t^3-2t+1)$ とおく。

$y'=6x^2-2$ より，$x=t$ における接線の傾きは $6t^2-2$ で，方程式は

$y-(2t^3-2t+1)=(6t^2-2)(x-t)$ …(*)

これが点$(1,1)$を通るとき，

$1-(2t^3-2t+1)=(6t^2-2)(1-t)$

$4t^3-6t^2+2=0$

$2t^3-3t^2+1=0$

$(t-1)(2t^2-t-1)=0$

$(t-1)^2(2t+1)=0$

$\therefore\ t=-\frac{1}{2},\ 1$

$t=-\frac{1}{2}$ のとき，接線の方程式は(*)に代入して

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ //

$t=1$ のとき，接線の方程式は(*)に代入して

$y=4x-3$ //

(2) P，Qのx座標をそれぞれp，qとおく。

P，Qにおける接線の傾きは

$6p^2-2$，$6q^2-2$

ともに直線PQに直交しているので，

$6p^2-2=6q^2-2$

$\therefore\ p^2=q^2$

$p\neq q$，$p<0$ だから，正の実数$k\ (>0)$を用いて，

$q=k,\ p=-k$

と表せる。

PあるいはQにおける接線の傾きは

$6k^2-2$ …①

また，直線PQの傾きは，

$$\frac{(2q^3-2q+1)-(2p^3-2p+1)}{q-p}$$

$$=\frac{2}{q-p}\{(q-p)(q^2+pq+p^2)-(q-p)\}$$

$$=2(q^2+pq+p^2-1)$$

$$=2(k^2-k^2+k^2-1)$$

$$=2(k^2-1)\ \cdots②$$

①と②が直交するので，

$(6k^2-2)\times2(k^2-1)=-1$

$12k^4-16k^2+5=0$

$(6k^2-5)(2k^2-1)=0$

$k^2=\frac{5}{6},\ \frac{1}{2}$

$k>0$ より $k=\sqrt{\frac{5}{6}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$

P，Qの座標は，

$P\left(-\frac{\sqrt{30}}{6},\ \frac{\sqrt{30}}{18}+1\right)$，$Q\left(\frac{\sqrt{30}}{6},\ -\frac{\sqrt{30}}{18}+1\right)$

$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$，$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$ //