2016年 薬学部（1日目） 第3問

増田

$\boxed{3}$ AB ＝ 2，AD ＝ 3，∠BAD ＝ 150° である四角形 ABCD において，

$$2\sqrt{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad \cdots (*)$$

が成り立つとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分 AC の長さを求めよ．

(2) ∠BAC の大きさと △BCD の面積を求めよ．

(1) 与式(＊)より、

$\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}\,\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

両辺を２乗

$|\overrightarrow{AC}|^2 = (2\sqrt{3}\,\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})\cdot(2\sqrt{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$

$= 12|\overrightarrow{AB}|^2 + 8\sqrt{3}\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 4|\overrightarrow{AD}|^2$

$= 12\cdot 4 + 8\sqrt{3}\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 150^\circ + 4\cdot 9$

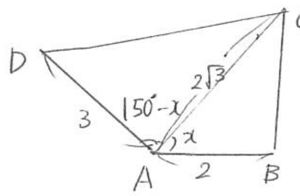
$= 48 - 72 + 36$

$= 12$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{12} = \underline{2\sqrt{3}}$ //

(2) 与式(＊)の両辺に対して $\overrightarrow{AC}$ との内積をとると

$\overrightarrow{AC}\cdot(2\sqrt{3}\,\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC}\cdot\vec{0} = 0$



$\angle CAB = x$ とおくと．

$\angle CAD = 150^\circ - x$

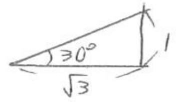
$2\sqrt{3}\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} - |\overrightarrow{AC}|^2 = 0$

$2\sqrt{3}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\cos x + 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos(150^\circ - x) - 12 = 0$

$2\cos x + \sqrt{3}\,\underbrace{\cos(150^\circ - x)}_{\cos 150^\circ\cos x + \sin 150^\circ \sin x \;=\; -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x} - 1 = 0$

$\frac{1}{2}(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 1$

$\frac{1}{2}\cdot 2\sin(x + 30^\circ) = 1$



$\sin(x + 30^\circ) = 1$

$0 < x < 150^\circ$ において $\sin(x+30^\circ) = 1$ となるのは．

$x + 30^\circ = 90^\circ$

$\therefore\ x = \underline{60^\circ = \angle BAC}$ //

（四角形ABCDの面積）

$=$（△ACDの面積）＋（△ABCの面積）

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sin 60^\circ$

$= 3\sqrt{3} + 3$

（△ABDの面積）$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sin 150^\circ = \frac{3}{2}$

（△BCDの面積）

＝（四角形ABCDの面積）－（△ABDの面積）

$= 3\sqrt{3} + 3 - \frac{3}{2}$

$= \underline{3\sqrt{3} + \frac{3}{2}}$ //