0002347182567999

崇城大学

2016年 薬学部（2日目） 第3問

増田

$\boxed{3}$ $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(4n+1)a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して，次の各問に答えよ．

…(＊)

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)a_k a_{k+1}$ を求めよ．

(1) 与式(＊)の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{(4n+1)a_n+1}{a_n}=(4n+1)+\frac{1}{a_n}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+(4n+1)$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)\quad(n\geqq 2)$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{2}(5+4n-3)$$

$$=1+(n-1)(2n+1)$$

$$=2n^2-n$$

$$=n(2n-1)$$

$$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n(2n-1)}$$ （n=1でも成立）

//

(2) $a_k=\dfrac{1}{k(2k-1)}$，$a_{k+1}=\dfrac{1}{(k+1)(2k+1)}$

だから，

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)a_k a_{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cancel{k}(\cancel{k+1})}{\cancel{k}(2k-1)(\cancel{k+1})(2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

//