0001889450118999

昭和大学

2014年 歯学部・薬学部・保健医療 第4問

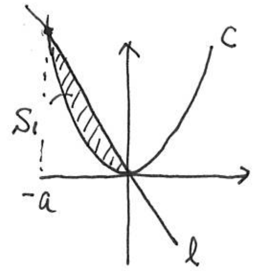
数理 石井K

$\boxed{4}$ 放物線 $C : y = x^2$ のグラフと直線 $\ell : y = -ax$ を考える．ただし，$0 < a < 2$ とする．C と ℓ で囲まれた図形の面積を S_1 とし，C と ℓ と直線 $x = -2$ のすべてで囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) S_1 を a の式で表せ．

(2) S_2 を a の式で表せ．

(3) $S = S_1 + S_2$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．



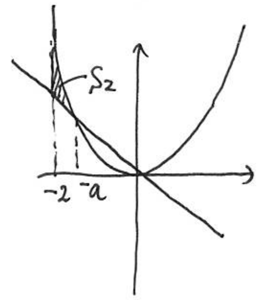
(1) $x^2 + ax = 0 \quad \therefore x(x+a) = 0$

$\therefore$ 交点の x 座標は $0, -a$

$$\therefore S_1 = \int_{-a}^{0} -ax - x^2 \, dx$$

$$= -\int_{-a}^{0} x(x+a)\,dx$$

$$= \underline{\frac{1}{6}a^3}$$



(2) $$S_2 = \int_{-2}^{-a} x^2 + ax \quad dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right]_{-2}^{-a}$$

$$= \underline{\frac{1}{6}a^3 - 2a + \frac{8}{3}}$$

(3) $$S(a) = \frac{1}{3}a^3 - 2a + \frac{8}{3}$$

$$\therefore S'(a) = a^2 - 2$$

a	(0)	…	$\sqrt{2}$	…	(2)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

$\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$

極小

$\therefore$ 最小値 $\underline{\dfrac{8-4\sqrt{2}}{3} \quad (a = \sqrt{2} \text{ のとき})}$