高崎経済大学

2010年 経済・地域政策 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 次の等号を満たす正の定数 a，および1次関数 $f(x)$ を求めよ．

$$\int_a^x (t-1)f(t)\,dt = -\frac{1}{2}x^2 - x + x^3\int_0^1 2t^2\,dt$$

$\int_0^1 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$ より

$$\int_a^x (t-1)f(t)\,dt = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}x^3$$

両辺を x で微分して．

$$(x-1)f(x) = -x-1+2x^2$$
$$= (2x+1)(x-1)$$

$\therefore\ (x-1)\{f(x)-2x-1\}=0$

これが x の値に関わらず成り立つので $\underline{f(x)=2x+1}$ //

このとき．$\int_a^x (t-1)f(t)\,dt = \int_a^x 2t^2-t-1\,dt$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t\right]_a^x$$
$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x \quad -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + a$$

$\therefore\ -\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + a = 0 \qquad a \neq 0$ より

$\therefore\ 4a^2 - 3a - 6 = 0 \iff a = \frac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot4\cdot6}}{8}$

$a>0$ より．$\underline{a = \frac{3+\sqrt{105}}{8}}$ //