

2016年 経済・地域政策 第3問


 数理
石井K

3 次の各問に答えよ。なお、整数 a, b, c について、 $a = bc$ と表されるとき、 a は b の倍数であるという。

(1) x は実数とする。不等式 $x^4 - x^2 - 20 < 0$ を解け。

(2) m は整数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、真である場合には証明し、偽である場合には反例をあげよ。

m は奇数 $\implies m^4 - m^2 - 20$ は 4 の倍数

(3) m は整数とする。次の命題の真偽を調べよ。また、真である場合には証明し、偽である場合には反例をあげよ。

$m^4 - m^2 - 20$ は 4 の倍数 $\implies m$ は奇数

$$(1) \quad x^4 - x^2 - 20 < 0 \iff (x^2 - 5)(x^2 + 4) < 0$$

$$x^2 + 4 > 0 \text{ より, } x^2 - 5 < 0$$

$$\therefore \underline{-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}}$$

(2) $m = 2n + 1$ (n : 整数) とおくと、

$$\begin{aligned} m^4 - m^2 - 20 &= (m^2 - 5)(m^2 + 4) \\ &= \{(2n + 1)^2 - 5\} \{(2n + 1)^2 + 4\} \\ &= (4n^2 + 4n - 4)(4n^2 + 4n + 5) \\ &= 4(n^2 + n - 1)(4n^2 + 4n + 5) \end{aligned}$$

ここで、 $n^2 + n - 1$ 、 $4n^2 + 4n + 5$ はともに整数より、右辺は 4 の倍数である。よって命題は真 \square

(3) 対偶：「 m は偶数 $\implies m^4 - m^2 - 20$ は 4 の倍数ではない」を考える。

m が偶数のとき、 m^4 、 m^2 はともに 4 の倍数であり、20 も 4 の倍数

$\therefore m^4 - m^2 - 20$ は 4 の倍数　よって偽

偽のときは反例だけ
書けばよいから、ここは
なくてもよい。

偽 (反例: $m = 0$ のとき)