高崎経済大学

2012年 経済・地域政策 第3問

数理 石井K

3 以下の各問に答えよ．

(1) $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのようなときか．

(2) $2\log_{10}u+\log_{10}v=1$ とする．u^3+uv^2 の最小値とそのときの u，v の値を求めよ．

(3) Oを原点とする xy 平面がある．この平面上に (2) で求めた u，v からなる点 $\mathrm{A}(u,\ v)$ をとる．点Aを通り，直線OAと $30°$ の角をなす直線の方程式をすべて求めよ．

(1) (左辺)−(右辺) $= \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$

$\geqq 0$　等号成立は $a=b$ のとき ▨

(2) $2\log_{10}u+\log_{10}v=1$ より．$\log_{10}u^2v=1$　$\therefore u^2v=10$

また，真数条件より．$u>0$，$v>0$

このとき $u^3+uv^2 = u^3+u\cdot\left(\dfrac{10}{u^2}\right)^2$

$= u^3+\dfrac{100}{u^3}$

$\geqq 2\cdot\sqrt{u^3\cdot\dfrac{100}{u^3}}$ （$\because$ (1)の不等式に $a=u^3$，$b=\dfrac{100}{u^3}$ を代入）

$= 20$

$\therefore$ u^3+uv^2 の最小値は 20 で，そのとき．$u=\sqrt[3]{10}$，$v=\sqrt[3]{10}$）//

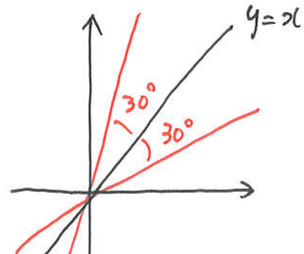
(3) 直線OAは $y=x$ なので 求める直線は2つあり

それらと x軸となす角は それぞれ $45°+30°=75°$

$45°-30°=15°$

$\therefore \tan 75° = \dfrac{\tan45°+\tan30°}{1-\tan45°\tan30°} = 2+\sqrt{3}$

$\tan 15° = \dfrac{\tan45°-\tan30°}{1+\tan45°\tan30°} = 2-\sqrt{3}$



$\therefore \begin{cases} y=(2+\sqrt{3})x-(1+\sqrt{3})\sqrt[3]{10} \\ y=(2-\sqrt{3})x+(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{10} \end{cases}$ //