# 茨城大学

2017 年 理学部 第 3 問

$\boxed{3}$ $n$を自然数とし，対数は自然対数とする．$x>0$の範囲で，2つの曲線$C: y=x\log x$と$C_n: y=k_nx^{n+1}$を考える．$C$と$C_n$は共有点$\mathrm{P}_n$をもち，かつ$\mathrm{P}_n$における$C$と$C_n$の接線が一致するように定数$k_n$を定める．$\mathrm{P}_n$の$x$座標を$a_n$とする．以下の各問に答えよ．

(1) 関数$y=x\log x$ $(x>0)$の増減，極値，および曲線$C$の凹凸，変曲点を調べ，$C$の概形をかけ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$であることは証明せずに用いてよい．

(2) $k_n$および$a_n$を$n$を用いて表せ．

(3) 曲線$C$と$C_2$および，2直線$x=a_1$，$x=a_2$で囲まれた部分の面積$T$を求めよ．

(4) 点$\mathrm{P}_n$における曲線$C_n$の接線と$x$軸との交点の$x$座標を$b_n$とし，$C_n$，2直線$x=a_n$，$x=b_n$および$x$軸で囲まれた部分の面積を$S_n$とする．極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2S_n$を求めよ．ただし，$e$を自然対数の底とし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$であることは証明せずに用いてよい．