

2016年工学部第1問

1  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して,  $a_n = 2^n$  とする. 自然数  $N$  に対して,  $a_0, a_1, \dots, a_N$  から重複なしにいくつかを選んで和をとるという操作を考える. 例えば,  $N = 1$  のときには, この操作によって自然数  $1, 2, 3$  を作ることができる ( $1 = a_0, 2 = a_1, 3 = a_0 + a_1$ ). 次の問いに答えなさい.

- (1)  $N = 2$  のとき, 7 以下のすべての自然数をこの操作によって作りなさい.
- (2) この操作によって作ることのできる最大の自然数は  $2^{N+1} - 1$  であることを示しなさい.
- (3) 自然数  $N$  に対して,  $2^{N+1} - 1$  以下のすべての自然数をこの操作によって作ることができる. このことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.
- (4) この操作によって 253 を作ることのできる最小の  $N$  の値を求めなさい.