長崎大学

2017年 歯学・工学部 第4問

$\boxed{4}$ xy 平面上に放物線 $C : y = x^2$ と直線 $\ell : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ がある．$t > 0$ とし，ℓ 上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\right)$ から C に接線を引く．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点Pを通り，傾き m の直線が C に接するとき，m が満たす2次方程式を求めよ．さらに，この2次方程式は，常に異なる2つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1)で求めた2次方程式の解を m_1，m_2 $(m_1 < m_2)$ とする．このとき，$m_1 + m_2$，$m_1 m_2$，$m_2 - m_1$ を，それぞれ t の式で表せ．

(3) 傾き m_1，m_2 の2本の接線が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ θ_1，θ_2 $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，$m_1 = \tan\theta_1$，$m_2 = \tan\theta_2$ を利用して $\tan(\theta_2 - \theta_1)$ を t の式で表せ．さらに，この式を $f(t)$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} f(t)$ を求めよ．

(4) $t > 0$ であることに注意して，(3)の関数 $f(t)$ の最小値と，そのときの t の値および $\theta_2 - \theta_1$ の値を求めよ．