0001861638318999

山形大学

2014年第1問

$\boxed{1}$ 座標平面上の点 $(-2,\ 1)$ を A，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$ を B とする．ただし，$0 < a < 2$ とする．また，$y = \dfrac{1}{4}x^2$ で表される放物線を C とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 放物線 C と線分 AB で囲まれる部分の面積 S を a の式で表せ．

(2) 直線 AB が直線 $x = 2$ と交わる点を D とする．放物線 C と線分 BD および直線 $x = 2$ で囲まれる部分の面積 T を a の式で表せ．

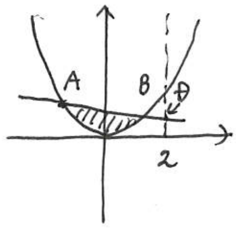
(3) 次の条件によって定められる数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ の一般項を求めよ．

(i) $p_1 = 1,\ p_n > 0,$

(ii) $q_n = \dfrac{1}{4}{p_n}^2,$

(iii) $p_n - p_{n+1} = 2\sqrt{q_n q_{n+1}}$

(4) $a = p_n$ のとき，(1) と (2) で求めた S と T に対し，$T > S$ となる最小の n を求めよ．



(1) AB: $y = \dfrac{\frac{1}{4}a^2 - 1}{a+2}(x+2) + 1$ $\quad \therefore$ AB: $y = \dfrac{a-2}{4}x + \dfrac{a}{2}$

$$\therefore S = \int_{-2}^{a} \frac{a-2}{4}x + \frac{a}{2} - \frac{1}{4}x^2\,dx = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{a}(x+2)(x-a)\,dx = \underline{\frac{(a+2)^3}{24}}$$

(2)
$$T = \int_{a}^{2} \frac{1}{4}x^2 - \frac{a-2}{4}x - \frac{a}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{a-2}{8}x^2 - \frac{ax}{2}\right]_a^2$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{a-2}{2} - a - \frac{a^3}{12} + \frac{a^2(a-2)}{8} + \frac{a^2}{2}$$
$$= \underline{\frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} - \frac{3}{2}a + \frac{5}{3}}$$

(3) $p_n - p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n p_{n+1}$

$\therefore p_n > 0$ より両辺を $p_n p_{n+1}$ で割って $\dfrac{1}{p_{n+1}} - \dfrac{1}{p_n} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \left\{\dfrac{1}{p_n}\right\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列 $\therefore \dfrac{1}{p_n} = \dfrac{n+1}{2}$ $\quad \therefore \underline{p_n = \dfrac{2}{n+1}}$

$q_n = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{(n+1)^2} = \underline{\dfrac{1}{(n+1)^2}}$

(4). $T - S = \dfrac{-6a+4}{3}$

$\therefore a < \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{n+1} < \dfrac{2}{3}$ より

$n > 2$

$\therefore \underline{n = 3}$