2015年 薬学部 第5問

$(2, -1, 1), (-2, 1, -1)$

5 一直線上にない3点A，B，Cを通る平面αがあった．$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 2)$のとき，この2つのベクトルに垂直で大きさが$\sqrt{6}$であるベクトル$\vec{p}$をすべて求めると，$\vec{p}=$ $\boxed{\text{ソ}}$ である．平面αが点$(0,\ 1,\ 2)$を通るとき，原点Oから平面αにおろした垂線OHの長さを求めると，OH$=$ $\boxed{\text{タ}}$ である．

$\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\vec{p}=(x, y, z)$ とおくと

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{p}$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{p}=x+2y=0$ $\cdots$①

$\overrightarrow{AC}\perp\vec{p}$ より $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{p}=-x+2z=0$ $\cdots$②

$|\vec{p}|=\sqrt{6}$ より $|\vec{p}|^2=6$ $\quad\therefore\ x^2+y^2+z^2=6$ $\cdots$③

①，② より $y=-\frac{1}{2}x,\ z=\frac{1}{2}x$ これらを③に代入して

$x^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2=6$ $\quad\therefore\ x=\pm 2$ $\quad\therefore\ \underline{\vec{p}=(2, -1, 1), (-2, 1, -1)}$ //

点Hは平面α上の点より，

$\overrightarrow{OH}=(0, 1, 2)+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

$=(s-t,\ 1+2s,\ 2+2t)$ $\cdots$④

$\overrightarrow{OH}\perp\alpha$，$\vec{p}\perp\alpha$ より，$\overrightarrow{OH}\parallel\vec{p}$ $\quad\therefore\ \overrightarrow{OH}=k\vec{p}$ となる実数kが存在する

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=k(2, -1, 1)$ $\cdots$⑤

④，⑤の各成分を比較して．

$$\begin{cases} s-t=2k & \cdots⑥ \\ 1+2s=-k & \cdots⑦ \\ 2+2t=k & \cdots⑧ \end{cases}$$

⑦，⑧ より． $s=-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{2}k-1$ これらを⑥に代入して

$-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k+1=2k$ $\quad\therefore\ k=\frac{1}{6}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OH}|=|k\vec{p}|=\frac{1}{6}|\vec{p}|=\underline{\frac{\sqrt{6}}{6}}$ //