

2016年理(物・化)・工・情報第3問

 数理  
石井K

3 次の各問に答えよ。

- (1) 関数  $y = \frac{\log x}{x}$  ( $x > 0$ ) の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形をかけ. ただし,  $\log$  は自然対数を表す. また, 等式  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  は証明なしに用いてよい.
- (2)  $a$  を正の実数とする. このとき,  $a^x = x^a$  を満たす正の実数  $x$  の個数を調べよ.
- (3) 定積分  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx$  を求めよ. ただし,  $e$  は自然対数の底である.

$$(1) y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

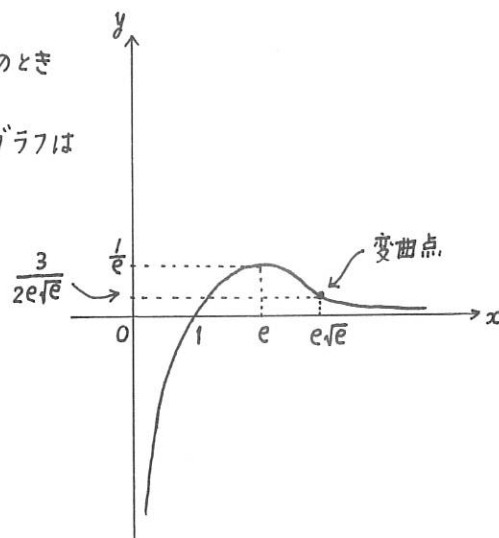
$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \log x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \log x}{x^3}$$

$\therefore y' = 0$  となるのは  $x = e$ ,  $y'' = 0$  となるのは  $x = e\sqrt{e}$  のとき

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  と下の増減表よりグラフは

右のようになる.

$x$	(0)	...	$e$	...	$e\sqrt{e}$	...
$y'$		+	0	-	-	-
$y''$		-	-	-	0	+
$y$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	$\searrow$



(2)  $a > 0, x > 0$  より,

$$a^x = x^a \iff x \log a = a \log x$$

$$\iff \frac{\log a}{a} = \frac{\log x}{x}$$

(1) のグラフより,  $\begin{cases} 1 \text{ 個} (0 < a \leq 1, a = e \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} (1 < a < e, e < a \text{ のとき}) \end{cases}$

$$(3) \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{1}{8}$$