信州大学

2015年 経済学部 第4問

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) n 個の実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n に対して

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$$

が成立することを示せ．また，等号が成立するための a_1, a_2, $\cdots$, a_n についての必要十分条件を求めよ．

(2) 偏りをもつサイコロを2回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ．ただし，サイコロが偏りをもつとは，1から6の目が同様に確からしく出ないことをいう．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = l$ とおき．各 k $(k=1, 2, \cdots, n)$ に対して．

$a_k = \dfrac{l}{n} + e_k$ とおく．ここで e_k は定数である．

このとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = l$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k = 0$ $\cdots$ ① が成り立つ

$$\begin{aligned}
n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 &= n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l}{n}+e_k\right)^2 \\
&= n\left(\frac{l^2}{n} + \frac{l}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k + \sum_{k=1}^{n} {e_k}^2\right) \\
&= l^2 + n\sum_{k=1}^{n} {e_k}^2 \qquad (\because ①より) \\
&\geqq l^2
\end{aligned}$$

すなわち，$\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成り立つ．

等号成立 は．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {e_k}^2 = 0 \iff e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0$

$\iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n =$ ▨

(2) さいころの k の目が出る確率を a_k で表す．$(k=1, 2, \cdots, 6)$

このとき．$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k = 1$ となるから (1) の不等式を使うと．

$1^2 \leqq 6 \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2$ よって．$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 \geqq \frac{1}{6}$ このサイコロは偏りをもつので (1) の等号成立条件をみたさない

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 > \frac{1}{6}$

これは，同じ目が続けて出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より大きいことを表している ▨