静岡大学

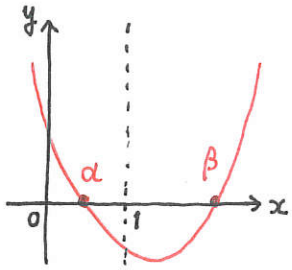
2010年 理（物・化）・工・情報 第1問

$\boxed{1}$ kを定数とする．2次方程式$x^2+(3k-2)x+4k=0$が2つの実数解α，βをもち，α，βは$0<\alpha<1<\beta$を満たすものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) kの値の範囲を求めよ．

(2) $(\beta-\alpha)^2$をkを用いて表せ．

(3) αとβの差が整数であるときのkおよびα，βの値を求めよ．



(1) $f(x)=x^2+(3k-2)x+4k$ とおく．

$0<\alpha<1<\beta$ より，

$f(0)>0$，$f(1)<0$ が成り立てばよい．

$f(0)=4k>0$ $\therefore k>0$ …①

$f(1)=1+3k-2+4k$

$=7k-1$ $\therefore k<\frac{1}{7}$ …② ①，②より，$\underline{0<k<\frac{1}{7}}$ //

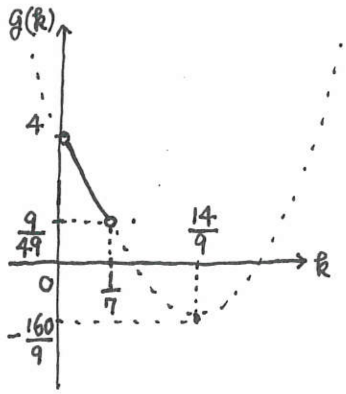
（①，②をみたすとき，右上図のようになり，判別式$D>0$は自動的に成り立つ）

(2) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-3k+2$，$\alpha\beta=4k$

$\therefore (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-3k+2)^2-16k$

$=\underline{9k^2-28k+4}$ //



(3) $g(k)=9k^2-28k+4$ $\left(0<k<\frac{1}{7}\right)$ とおくと，

$g(k)=9\left(k-\frac{14}{9}\right)^2-\frac{160}{9}$

$\therefore 0<k<\frac{1}{7}$ において，$\frac{9}{49}<g(k)=(\beta-\alpha)^2<4$

αとβの差が整数のとき，$(\beta-\alpha)^2$は平方数となるから，この範囲では，1のみである．

$\therefore g(k)=(\beta-\alpha)^2=1$ $\therefore 9k^2-28k+4=1$ $\therefore (9k-1)(k-3)=0$

$0<k<\frac{1}{7}$ より，$\underline{k=\frac{1}{9}}$ // $\alpha<\beta$ より，$\beta-\alpha=1$ これと $\alpha+\beta=-3k+2=\frac{5}{3}$ より，

$\underline{\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{4}{3}}$ //