2014 年 教育学部（数学・技術）第 4 問

4 座標平面において，4 直線 $y=2$，$y=-4$，$x=-3$，$x=5$ 上にそれぞれ点 A，B，C，D をとる．この 4 点を頂点とする四角形が $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$ となる正方形であるとき，点 A，B，C，D の座標を求めよ．

$A(a, 2)$，$B(b, -4)$，$C(-3, c)$，$D(5, d)$ とおくと．

対角線 AC と BD の中点は一致するので

$$\left(\frac{a-3}{2}, \frac{2+c}{2}\right) = \left(\frac{b+5}{2}, \frac{d-4}{2}\right) \quad \therefore b = a-8 \cdots ①,\quad d = c+6 \cdots ②$$

また，AB の傾きは $\dfrac{6}{a-b} = \dfrac{3}{4}$（∵ ①より）

BC の傾きは．$\dfrac{-4-c}{b+3} = \dfrac{-4-c}{a-5}$

∴ AB ⊥ BC より．$\dfrac{-4-c}{a-5} = -\dfrac{4}{3}$　　∴ $c = \dfrac{4a-32}{3}$ $\cdots ③$

以上 ①～③ より 4 点は次のように a で表される

$A(a, 2)$，$B(a-8, -4)$，$C\left(-3, \dfrac{4a-32}{3}\right)$，$D\left(5, \dfrac{4a-14}{3}\right)$

∴ $AB = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

$BC = \sqrt{(a-5)^2 + \left(\dfrac{4a-20}{3}\right)^2} = \dfrac{5}{3}|a-5|$

∴ AB = BC より $\dfrac{5}{3}|a-5| = 10$　∴ $|a-5| = 6$

∴ $a = 11, -1$

∴ $A(11, 2)$，$B(3, -4)$，$C(-3, 4)$，$D(5, 10)$ または

$A(-1, 2)$，$B(-9, -4)$，$C(-3, -12)$，$D(5, -6)$ ―― //