0001851548418999

兵庫県立大学

2014年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = 2x + \dfrac{10}{x} - \log x$ に対して $a_n = f(n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ．

(2) a_n が最小となる n を求めよ．

(1) $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + \dfrac{10}{n+1} - \log(n+1) - 2n - \dfrac{10}{n} + \log n$

$= 2 + \dfrac{10n - 10(n+1)}{n(n+1)} + \log\dfrac{n}{n+1}$

$= 2 + \log\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{10}{n(n+1)}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty}\Big(2 + \underbrace{\log\frac{n}{n+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{10}{n(n+1)}}_{\to 0}\Big)$

$= \underline{2}$ //

(2) $f'(x) = 2 - \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{(2x-5)(x+2)}{x^2}$

x	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

ここでは $x \geqq 1$ として考えることとする．

$\therefore$ $x = \dfrac{5}{2}$ で最小となるので，

a_n が最小となるのは a_2 または a_3

$a_2 = 4 + \dfrac{10}{2} - \log 2 = 9 - \log 2$ $\quad a_3 = 6 + \dfrac{10}{3} - \log 3 = \dfrac{28}{3} - \log 3$

$\therefore a_3 - a_2 = \dfrac{1}{3} + \log\dfrac{2}{3} = \log\dfrac{2e^{\frac{1}{3}}}{3}$

ここで，$\left(\dfrac{2e^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3 = \dfrac{8e}{27} < \dfrac{8\times 3}{27} = \dfrac{24}{27} < 1$ $\quad\therefore \log\dfrac{2e^{\frac{1}{3}}}{3} < 0$

$\therefore a_3 - a_2 < 0 \iff a_3 < a_2$

$\therefore$ a_n が最小となるのは $\underline{n = 3}$ //