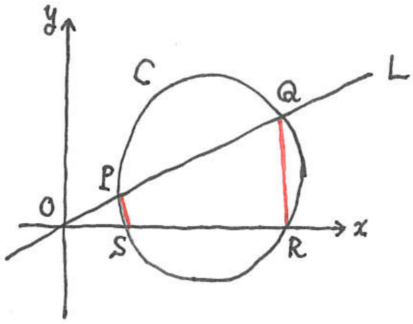
自治医科大学

2013年 医学部 第16問

数理 石井K

$\boxed{16}$ 円 $C: x^2+y^2-15x-10y+50=0$，直線 $L: y=mx$（m は正の実数）について考える．円 C と直線 L は，異なる2つの点 $\mathrm{P}(p,\ mp)$，$\mathrm{Q}(q,\ mq)$ $(q>p)$ で交わることとする．円 C と x 軸は，異なる2つの点 R，S で交わる（R，S のうち，原点に近い点を S とする）．線分 QR の長さが，線分 PS の長さの2倍となるとき，$\dfrac{13mp}{12}$ の値を求めよ．



円の式に $y=0$ を代入して．$x^2-15x+50=0$

$\therefore (x-5)(x-10)=0 \quad \therefore x=5,\ 10$

よって．$S(5,0)$，$R(10,0)$

右の図において．$\angle O$（共通），

四角形 PQRS が円 C に内接するので，

$\angle ORQ = 180^\circ - \angle QPS$，また，$\angle OPS = 180^\circ - \angle QPS$

$\therefore \angle OPS = \angle ORQ$

以上より．2つの角がそれぞれ等しいので，$\triangle OPS \backsim \triangle ORQ$

相似比は，$PS : RQ = 1:2$

$OR=10$ より．$OP : OR = 1:2$ に代入して．$OP=5$

$\therefore \triangle OPS$ と $\triangle ORQ$ は二等辺三角形である．

線分 PS の中点を M とすると，$M\left(\dfrac{p+5}{2},\ \dfrac{mp}{2}\right)$ であり．

図形の対称性より．直線 OM は円 C の中心 $\left(\dfrac{15}{2},\ 5\right)$ を通る．

$OM: y=\dfrac{mp}{p+5}x$ であるから，$5=\dfrac{mp}{p+5}\cdot\dfrac{15}{2}$

$\therefore mp=\dfrac{2}{3}(p+5) \quad \therefore$ 点 $P\left(p,\ \dfrac{2}{3}(p+5)\right)$ となる．

P は円 C 上の点より．$p^2+\dfrac{4}{9}(p+5)^2-15p-\dfrac{20}{3}(p+5)+50=0$

$\therefore 13p^2-155p+250=0$

$\therefore (13p-25)(p-10)=0 \quad \therefore p=\dfrac{25}{13},\ 10 \qquad p<q$ より $p=\dfrac{25}{13}$

$\therefore mp=\dfrac{2}{3}(p+5)$ より．$mp=\dfrac{60}{13} \qquad \therefore \dfrac{13mp}{12}=\underline{5}$ //