

2014年工学部 第4問

 数理
石井K

4 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $x > 0$ を考える. 下の問いに答えなさい.

- (1) $f(x)$ の最大値, およびその最大値を与える x の値を求めなさい.
 (2) (1) の結果を利用して $e^3 > 3^e$ であることを証明しなさい. ただし, e は自然対数の底である.

$$(1) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

右の増減表より, 最大値 $\frac{1}{e}$ ($x=e$ のとき)

x	(0)	\dots	e	\dots
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow

(2) $3 > e$ であり, $\frac{1}{e}$ が $f(x)$ の最大値であることから

$$f(e) > f(3)$$

$$\therefore \frac{1}{e} > \frac{\log 3}{3}$$

$$\text{両辺 } 3e \text{ をかけて, } 3 > \log 3^e$$

$$\therefore \log e^3 > \log 3^e$$

$$\text{底は } e (> 1) \text{ より, } e^3 > 3^e \quad \square$$