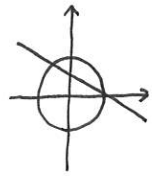
2014年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる2点で交わるものとする．その2つの交点をP，Qとする．次の問いに答えよ．



(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) 2点P，Qを通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ．

(3) 上の(2)の円の中心を $(a,\ 2a)$，半径を r とする．r^2 を a と k で表せ．

(4) 点Rの座標を $(2,\ 1)$ とする．k の値が(1)で求めた範囲を動くとき，3点P，Q，Rを通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ．

(1) 点と直線のキョリ公式より．$\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}} < 1$ (円の半径) ∴ $|k|<\sqrt{5}$

∴ $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ //

(2) $P\left(\alpha,\ \dfrac{k-\alpha}{2}\right)$，$Q\left(\beta,\ \dfrac{k-\beta}{2}\right)$ とおける

α,β は $x^2+\left(\dfrac{k-x}{2}\right)^2=1$ すなわち，$5x^2-2kx+k^2-4=0$ の解なので，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{2}{5}k$，$\alpha\beta=\dfrac{k-4}{5}$

∴P, Qの中点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{2k-(\alpha+\beta)}{4}\right)=\left(\dfrac{k}{5},\ \dfrac{2}{5}k\right)$

(また，$\beta-\alpha=\dfrac{2k+\sqrt{D}}{10}-\dfrac{2k-\sqrt{D}}{10}=\dfrac{\sqrt{D}}{5}=\dfrac{4\sqrt{5-k^2}}{5}$ ($\beta>\alpha$ とした)) 使わなかった

∴中点を通り，PQに垂直な直線は $y=2\left(x-\dfrac{k}{5}\right)+\dfrac{2}{5}k$ ∴ $y=2x$ ▨

(3) 点と直線のキョリ公式より，(点 $(a, 2a)$ と直線 $x+2y=k$ に対して使う)

$\left(\dfrac{|a+4a-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2=r^2-\dfrac{PQ^2}{4}$ ∴ $r^2=\dfrac{(5a-k)^2}{5}+\dfrac{5-k^2}{5}$ $r^2=5a^2-2ka+1$ //

(4) (2),(3)より．円は $(x-a)^2+(y-2a)^2=5a^2-2ka+1$

これがR(2, 1)を通るので，$(2-a)^2+(1-2a)^2=5a^2-2ka+1$

∴ $a=\dfrac{2}{4-k}$ (1)より $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ なので，

$\dfrac{2}{4+\sqrt{5}}<a<\dfrac{2}{4-\sqrt{5}} \iff \dfrac{8-2\sqrt{5}}{11}<a<\dfrac{8+2\sqrt{5}}{11}$ //