

2011年第4問

4 次のようなゲームを考える。成功の確率が p ($0 < p < 1$)、失敗の確率が $q (= 1 - p)$ であるような試行を A と B の 2 人が行い、先に成功した方を勝ちとする。なお、A が勝つ確率が B が勝つ確率より大きいとき、ゲームは A に有利であるといい、A が勝つ確率と B が勝つ確率が等しいとき、ゲームは公平であるという。このとき、次の問に答えよ。

- (1) A から始めて、以後交互に試行を行う。すなわち、ABABAB \cdots という順で試行を行う。このとき、 p の値にかかわらずゲームは A に有利であることを示せ。
- (2) A から始めるが、A が 1 回に対して、B は 2 回試行を行えるとする。すなわち、ABBABB \cdots という順で試行を行う。 p がどのような値のとき、ゲームは公平になるか。
- (3) (2) において、ゲームが公平であるとき、 q についての等式 $q = q^2 + q^4 + q^6 + \cdots$ が成り立つことを示せ。