0002196273087999

静岡大学

2016年 教育・農・理（生物，地球） 第1問

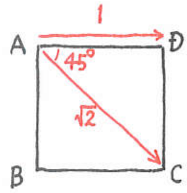
数理 石井K

$\boxed{1}$ 一辺の長さが1の正方形ABCDが平面上にある．ただし，頂点A，B，C，Dは，この順に反時計回りに並んでいるものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ の値を求めよ．

(2) 点Pを平面上の点とするとき，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$ を証明せよ．

(3) 点Pが平面上を動くとき，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PA}$ の最小値を求めよ．また，その最小値を与える点Pについて，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ．



(1) 右図より，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=\underline{1}$ //

(2) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD} \iff \overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$

$\iff \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

ABCDは正方形より，これは成り立つ

よって，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$ は成り立つ ▨

(3) (2)より，$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA}$ であるから，

(与式) $=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})+(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PA})\cdot\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PA}$

$=|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}+|\overrightarrow{PD}|^2$

$=|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}|^2$

$=\left|2\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}-\overrightarrow{AP}\right)\right|^2$

$\therefore$ $\underline{最小値は 0，そのとき \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})}$ //