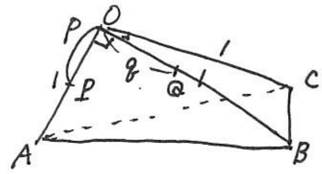
2014年 理系 第2問

$\boxed{2}$ 四面体OABCは，$OA = OB = OC = 1$，$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$ をみたす．辺OA上の点Pと辺OB上の点QをOP $= p$，OQ $= q$，$pq = \dfrac{1}{2}$ となるようにとる．$p + q = t$ とし，△CPQの面積を S とする．

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ．

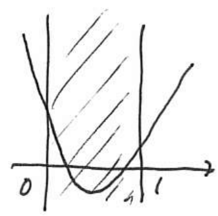
(2) S を t で表せ．

(3) S の最小値，およびそのときの p，q を求めよ．



(1) $pq = \frac{1}{2}$，$p + q = t$ $(0 < p, q \leqq 1)$ より，

p, q は，方程式 $x^2 - tx + \frac{1}{2} = 0$ の解である



$\therefore$ 判別式 $D = t^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \geqq 0$

$\therefore t^2 \geqq 2$ $t > 0$ より，$t \geqq \sqrt{2}$ …①

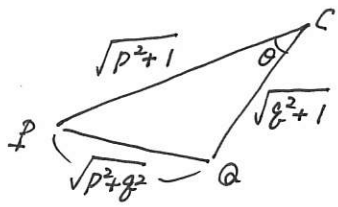
また，$y = x^2 - tx + \frac{1}{2}$ の軸は $0 < \frac{t}{2} \leqq 1$ $\therefore$ $0 < t \leqq 2$ …②

$f(x) = x^2 - tx + \frac{1}{2}$ とおくと，$f(0) = \frac{1}{2} > 0$，$f(1) = \frac{3}{2} - t \geqq 0$

$\therefore$ $t \leqq \frac{3}{2}$ …③

①～③より $\underline{\sqrt{2} \leqq t \leqq \frac{3}{2}}$ //

(2) 右の図より，



余弦定理から $p^2 + q^2 = p^2 + 1 + q^2 + 1 - 2\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}\cos\theta$

$\therefore$ $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{4t^2+1}}$ $\therefore$ $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{4t^2-3}{4t^2+1}}$

$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4t^2+1} \cdot \sqrt{\dfrac{4t^2-3}{4t^2+1}}$

$= \underline{\frac{1}{4}\sqrt{4t^2-3}}$ //

(3) (1),(2)より $t = \sqrt{2}$ のとき

S は最小値 $\underline{\frac{\sqrt{5}}{4}}$ // をとる

このとき p, q は

$x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0$ の解より

$\underline{p = q = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ //