0001647362538999

東北大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ 実数x, yに対して

$$A=2\sin x+\sin y,\quad B=2\cos x+\cos y$$

とおく.

(1) $\cos(x-y)$をA, Bを用いて表せ.

(2) x, yが$A=1$を満たしながら変化するとき，Bの最大値と最小値，およびそのときの$\sin x$, $\cos x$の値を求めよ.

(1) $A^2=4\sin^2 x+4\sin x\sin y+\sin^2 y$

$B^2=4\cos^2 x+4\cos x\cos y+\cos^2 y$

$\therefore A^2+B^2=5+4(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$\therefore \cos(x-y)=\dfrac{A^2+B^2-5}{4}$ —//

(2) (1)より. $B^2=-A^2+5+4\cos(x-y)$

$\therefore A=1$ のとき　$B^2=4\{1+\cos(x-y)\}$

$\therefore B^2$の最大値は　8 ($x=y$ のとき)

注　$0\leqq x, y<2\pi$ として考えてもよいのでそうした.

このとき.　$A=3\sin x=1$ より.

$\sin x=\frac{1}{3}$

$B=3\cos x=3\cdot\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\pm 2\sqrt{2}$

したがって.
$$\begin{cases}\text{最大値 } 2\sqrt{2}\ \left(\sin x=\frac{1}{3},\ \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\\ \text{最小値 } -2\sqrt{2}\ \left(\sin x=\frac{1}{3},\ \cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\end{cases}$$

—//