2014年 文系 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, b, p, qを実数とする．3つの2次方程式

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$x^2+px+q=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$2x^2+(a+p)x+b+q=0 \quad \cdots\cdots③$$

について，次を証明せよ．

(1) ①，②，③がすべて重解をもてば，$a=p$かつ$b=q$である．

(2) ①，②がともに虚数解をもてば，③も虚数解をもつ．

(1) 重解をもつ $\Leftrightarrow$ (判別式) $=0$ より. それぞれの判別式を D_1, D_2, D_3 とおくと, $D_1=a^2-4b$, $D_2=p^2-4q$, $D_3=(a+p)^2-4\cdot 2(b+q)$

$\therefore$ $b=\dfrac{a^2}{4}$, $q=\dfrac{p^2}{4}$ これを $D_3=0$ の式に代入すると.

$-a^2+2ap-p^2=0$ $\therefore$ $(a-p)^2=0$ $\therefore a=p$

このとき. $a^2-4b=0$, $a^2-4q=0$ より $b=q$ ▨

(2) $D_1=a^2-4b<0$ かつ $D_2=p^2-4q<0$ のとき.

$D_3=(a+p)^2-2(4b+4q)$

$<(a+p)^2-2(a^2+p^2)$

$=-(a-p)^2$

$\leqq 0$

$\therefore$ $D_3<0$ となり. ③も虚数解をもつ ▨