

2012年医学部第2問

2 C_1 を中心 $(0, 0)$, 半径 1 の円とし, C_2 を中心 $(0, 0)$, 半径 $r > 1$ の円とする. $ad - bc > 0$ を満たす行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換により円 C_1 が円 C_2 に移るとする. 次の問いに答えよ.

(1) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = r^2$, $ab + cd = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $a = r \cos \theta$, $c = r \sin \theta$ (θ は実数) とおくととき, b, d を r, θ を用いて表せ.

(3) $B = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. また, C_1 に外接し, C_2 に内接する 8 個の相異なる円 S_1, S_2, \dots, S_8 が次の 3 条件 (i), (ii), (iii) を満たしているとする. このとき, r を求めよ.

(i) 行列 B で表される 1 次変換により S_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) は S_{i+1} に, S_8 は S_1 に移る.

(ii) S_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, 7$) は S_i に外接し, S_8 は S_1 にも外接する.

(iii) S_1 は S_3, S_4, \dots, S_7 と交わらない.