電気通信大学

2013 年 第 1 問

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2\sin x}$ $(0 < x < \pi)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．さらに，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(3) $0 < x < \pi$ のとき，

$$\frac{d}{dx}\{\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)\}$$

を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(1) $f'(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{2\sin^2 x\cos x - \cos x}{2\sin^2 x}$

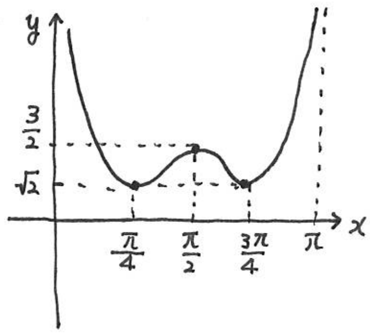
$= \dfrac{\cos x(2\sin^2 x - 1)}{2\sin^2 x}$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$\underline{x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{4}}$ //

(2) (1) より増減表は下のようになる

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\pi-} f(x) = +\infty$



$\left\{\begin{array}{l} 極小値は \sqrt{2}\ \left(x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right) \\ 極大値は \frac{3}{2}\ \left(x = \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right.$ //

(3) (与式) $= \dfrac{\sin x}{1-\cos x} - \dfrac{(-\sin x)}{1+\cos x}$

$= \underline{\dfrac{2}{\sin x}}$ //

(4) (与式) $= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin x + \frac{1}{2\sin x}\,dx$

$= \left[-\cos x + \dfrac{1}{4}\{\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)\}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{4}\log\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \underline{\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})}$ //