

2014年工学部第4問

数理
石井

4 関数 $f(x) = \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。
 (2) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
 (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めよ。

(1) 三倍角の公式より, $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ $\therefore \cos^3 \theta = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}$

$$\therefore f(x) = \cos x - \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x$$

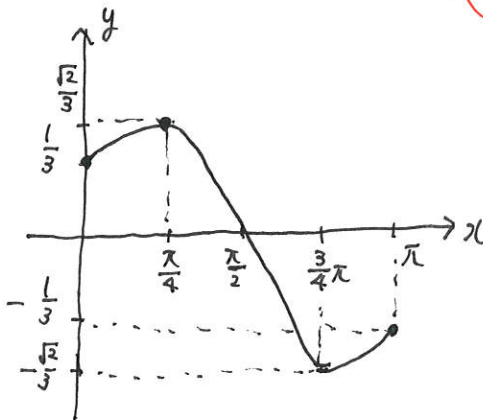
$$= \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x)$$

$$= \cos 2x \sin x$$

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

x	0	\dots	$\frac{\pi}{4}$	\dots	$\frac{3\pi}{4}$	\dots	π
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\frac{1}{3}$	\nearrow	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	\searrow	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	\nearrow	$-\frac{1}{3}$
			極大		極小		

(2)



$x=0, \pi$ は、導関数の定義域は、

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ が定義できないので

厳密には書かない!

書いても減点されないよもすまが...

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x \right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{5}{9}$$