

2015年 第6問

 6 150個の整数 $2^1, 2^2, \dots, 2^{150}$ に対して、次の設問に答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

- (1) 最下位の数字が2になるものは何個あるか。
 (2) 2^{150} は何桁の数か。
 (3) 最上位の数字が1になるものは何個あるか。

 (1) 最下位の数字は $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots$ となるので

最下位の数字が2になるのは、

$$\frac{148}{4} + 1 = \underline{38 \text{ 個}}$$

 (2) $10^{n-1} \leq 2^{150} < 10^n$ として、対数をとる

$$n-1 \leq 150 \log_{10} 2 < n$$

$$\therefore \text{ここで, } 150 \log_{10} 2 = 150 \cdot 0.3010 = 45.15 \text{ より}$$

$$n-1 \leq 45.15 < n \quad \therefore n = 46 \quad \therefore \underline{46 \text{ 桁}}$$

(3) $2^1, 2^2, \dots, 2^{150}$ のうち、桁数が増えるとき、その最初の数の最上位の数字は1となる。
 また、このときだけ、最上位の数字が1となる。

$$\text{例えば, } 2^3 (= 8, 1 \text{ 桁}) \rightarrow 2^4 (= \underline{16}, 2 \text{ 桁})$$

$$2^6 (= 64, 2 \text{ 桁}) \rightarrow 2^7 (= \underline{128}, 3 \text{ 桁})$$

$$2^9 (= 512, 3 \text{ 桁}) \rightarrow 2^{10} (= \underline{1024}, 4 \text{ 桁})$$

$\therefore 2^{150}$ が 46 桁であることと、最上位の数字が1である1桁の数は1であるが、1は含まれていないことより、

$$\text{求める個数は, } 46 - 1 = \underline{45 \text{ 個}}$$