0002051908497999

東北学院大学

2015年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 放物線 $C : y = x^2 - x$ について以下の問いに答えよ．ただし $a > 0$ とする．

(1) 点 $(0,\ -a)$ を通る C の 2 つの接線の方程式およびそれぞれの接点の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた 2 つの接点を通る直線および C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) (1) で求めた 2 つの接線および C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) 接点を $(t,\ t^2-t)$ とおくと，接線は，$y' = 2x-1$ より

$y = (2t-1)(x-t) + t^2 - t$

すなわち，$y = (2t-1)x - t^2$ となり，これが $(0,\ -a)$ を通るので

$-a = -t^2 \quad \therefore\ t = \pm\sqrt{a}$

$\therefore$ 接線は，$\begin{cases} y = (2\sqrt{a}-1)x - a, & \text{接点は } (\sqrt{a},\ a-\sqrt{a}) \\ y = (-2\sqrt{a}-1)x - a, & \text{接点は } (-\sqrt{a},\ a+\sqrt{a}) \end{cases}$ //

(2) 2 つの接点を通る直線は，

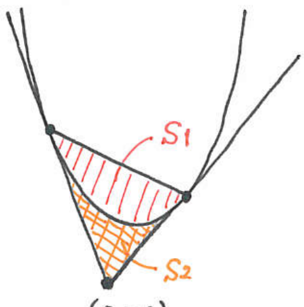
$y = \dfrac{a-\sqrt{a}-(a+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-(-\sqrt{a})}(x-\sqrt{a}) + a - \sqrt{a} \qquad \therefore\ \underline{y = -x + a}$ //

$S_1 = \displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} -x+a-(x^2-x)\,dx$

$= -\displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})\,dx$

$= \dfrac{1}{6}\left\{\sqrt{a}-(-\sqrt{a})\right\}^3$

$= \underline{\dfrac{4}{3}a\sqrt{a}}$ //



(3) $S_2 = \displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{0} x^2-x-(-2\sqrt{a}-1)x+a\,dx + \int_{0}^{\sqrt{a}} x^2-x-(2\sqrt{a}-1)x+a\,dx$

$= \displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{0} (x+\sqrt{a})^2\,dx + \int_{0}^{\sqrt{a}} (x-\sqrt{a})^2\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{3}(x+\sqrt{a})^3\right]_{-\sqrt{a}}^{0} + \left[\dfrac{1}{3}(x-\sqrt{a})^3\right]_{0}^{\sqrt{a}}$

$= \underline{\dfrac{2}{3}a\sqrt{a}}$ //

(別) 上図の

$S_2 =$ (三角形) $- S_1$

で計算してもよい