



2013年文系第4問

4  $C$  を  $xy$  平面上の放物線  $y = x^2$  とする. 不等式  $y < x^2$  で表される領域の点  $P$  から  $C$  に引いた2つの接線に対して, それぞれの接点の  $x$  座標を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする. また, 2つの接線と  $C$  で囲まれた部分の面積を  $S$  とする. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 等式

$$\int_p^q (x-p)^2 dx = \frac{(q-p)^3}{3}$$

を用いてもよい.

- (1) 点  $P$  の座標  $(a, b)$  を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ.
- (2)  $S = \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$  を示せ.
- (3) 点  $P$  が曲線  $y = x^3 - 1$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 上を動くとき,  $(\beta - \alpha)^2$  の値の範囲を調べよ. さらに,  $S$  の最大値および最小値を与える点  $P$  の座標を求めよ.