0001500549948999

東北学院大学

2012年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) α，β を実数の定数とするとき，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

を計算せよ．

(2) 点 $(1,\ 2)$ を通る直線と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積が最小となるときの直線の傾きを求めよ．

(1) $(\text{与式}) = \int_{\alpha}^{\beta}\left\{(x-\beta)+(\beta-\alpha)\right\}(x-\beta)\,dx$

$= \int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx + (\beta-\alpha)\int_{\alpha}^{\beta} x-\beta\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\alpha}^{\beta} + (\beta-\alpha)\left[\frac{1}{2}(x-\beta)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$

$= -\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^3 + (\beta-\alpha)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(\alpha-\beta)^2$

$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

$= \underline{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$ //

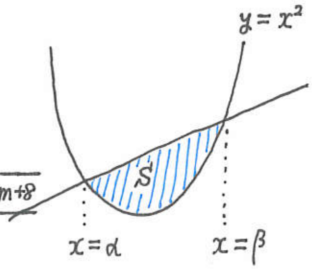
(2) 点 $(1,2)$ を通る直線のうち $x=1$ は放物線と1点のみで交わり

囲まれる部分は存在しないので，それ以外のときを考える．

このとき直線は $y=m(x-1)+2$ と表せる

$x^2-m(x-1)-2=0 \iff x^2-mx+m-2=0$

の解を小さい方から α，β とすると，$\alpha=\frac{m-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$，$\beta=\frac{m+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$



$S=\int_{\alpha}^{\beta} mx-m+2-x^2\,dx$

$= -\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad (\because (1)\text{より})$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{m+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}-\frac{m-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}\right)^3$

$= \frac{1}{6}(m^2-4m+8)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{6}\left\{(m-2)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}$

$\therefore$ 面積 S が最小となるのは

<u>傾きが 2 のとき</u> //