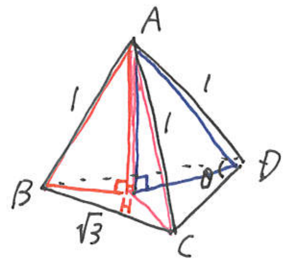
2014年 理（数理科学）・医 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 四面体ABCDにおいて，　1枚目／2枚.



$$AB = AC = AD = 1,\quad BC = \sqrt{3},\quad \angle BDC = \theta$$

のとき，次の問いに答えなさい．ただし，$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 点Aから△BCDを含む平面に垂線を下ろし，その平面との交点をHとする．線分AH，BH，CH，DHの長さを，それぞれθを用いて表しなさい．

(2) $t = \cos\theta$ とする．θを一定の値に保ったまま点Dが動くときの四面体ABCDの体積の最大値を，tを用いて表しなさい．

(3) (2)で求めた四面体ABCDの体積の最大値を$V(t)$とする．$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲でθが動くときの$V(t)$の最大値を求めなさい．ただし，$V(t)$が最大値をとるときのθの値は求めなくてよい．

(1) $AH = h$ とおいて 直角三角形 $\triangle ABH$, $\triangle ACH$, $\triangle ADH$ に三平方の定理を用いて，

$$h^2 + BH^2 = h^2 + CH^2 = h^2 + DH^2 = 1 \qquad \therefore BH = CH = DH = \sqrt{1-h^2}$$

$\therefore$ $\triangle BCD$ の外接円の半径は $\sqrt{1-h^2}$

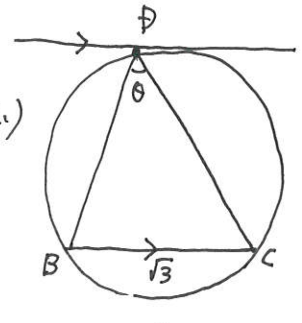
一方，正弦定理より，外接円の半径は $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}$ であるから

$$\sqrt{1-h^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta} \qquad \therefore \underline{AH = h = \frac{\sqrt{4\sin^2\theta - 3}}{2\sin\theta}}\ /\!/$$

このとき，$\underline{BH = CH = DH = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}\ /\!/$

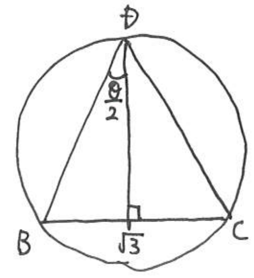
(2) Dでの外接円の接線がBCに平行のとき

△BCDの面積は最大になる（高さが最大になるので）



このとき，△BCDは二等辺三角形となる（DB = DC）

$$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{3\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin\frac{\theta}{2}}$$



$$\therefore V(t) = \frac{3\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sqrt{4\sin^2\theta - 3}}{2\sin\theta} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sqrt{4(1-\cos^2\theta)-3}}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

2枚目につづく

2014年 理（数理科学）・医 第3問

数理 石井K

3 四面体ABCDにおいて，　2枚目/2枚

$$AB = AC = AD = 1, \quad BC = \sqrt{3}, \quad \angle BDC = \theta$$

のとき，次の問いに答えなさい．ただし，$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．

(1) 点Aから△BCDを含む平面に垂線を下ろし，その平面との交点をHとする．線分AH，BH，CH，DHの長さを，それぞれθを用いて表しなさい．

(2) $t = \cos\theta$ とする．θを一定の値に保ったまま点Dが動くときの四面体ABCDの体積の最大値を，tを用いて表しなさい．

(3) (2)で求めた四面体ABCDの体積の最大値を$V(t)$とする．$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲でθが動くときの$V(t)$の最大値を求めなさい．ただし，$V(t)$が最大値をとるときのθの値は求めなくてよい．

(2) のつづき.

$$\therefore V(t) = \frac{\sqrt{1-4\cos^2\theta}}{16\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{1-4\cos^2\theta}}{16\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}} = \underline{\frac{\sqrt{1-4t^2}}{8(1-t)}} \;//$$

(3) $$V'(t) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-8t}{\sqrt{1-4t^2}}\cdot 8(1-t) - \sqrt{1-4t^2}\cdot(-8)}{64(1-t)^2}$$

$$= \frac{1-4t}{8(1-t)^2\sqrt{1-4t^2}}$$

$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より　$0 < t < \frac{1}{2}$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$(\frac{1}{2})$
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{12}$	$\searrow$	

極大

∴右の増減表より.

$V(t)$の最大値は $\underline{\frac{\sqrt{3}}{12}}$ //