2010年 第2問

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の関係式を満たしている.

$$a_1=1,\ b_1=1,\ a_{n+1}=a_n-b_n,\ b_{n+1}=2a_n+4b_n\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ.

(1) $c_n=a_n+b_n$ とおく. c_n を求めよ.

(2) $d_n=2a_n+b_n$ とおく. d_n を求めよ.

(3) a_n と b_n を求めよ.

(1) 2つの漸化式を足して, $a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n+3b_n$

$\therefore\ c_{n+1}=3c_n$ $\quad\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ は 初項 $a_1+b_1=2$, 公比3の等比数列

$\therefore\ \underline{c_n=2\cdot 3^{n-1}}$ //

(2) $a_{n+1}=a_n-b_n\cdots$①, $b_{n+1}=2a_n+4b_n\cdots$② とすると

①×2+② より, $2a_{n+1}+b_{n+1}=4a_n+2b_n$ $\quad\therefore\ 2a_{n+1}+b_{n+1}=2(2a_n+b_n)$

$\therefore\ d_{n+1}=2d_n$ $\quad\therefore$ 数列 $\{d_n\}$ は 初項 $2a_1+b_1=3$, 公比2の等比数列

$\therefore\ \underline{d_n=3\cdot 2^{n-1}}$ //

(3) (1)より $a_n+b_n=2\cdot 3^{n-1}\cdots$③, (2)より $2a_n+b_n=3\cdot 2^{n-1}\cdots$④

④−③より, $\underline{a_n=3\cdot 2^{n-1}-2\cdot 3^{n-1}}$ //

③×2−④より $\underline{b_n=4\cdot 3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}}$ //