



2013年医学部第1問

 数理
石井K

1 平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} が $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$, $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2$ を満たすように動く. ベクトル $\vec{a} + 2\vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$ を, それぞれ \vec{x} , \vec{y} とし, \vec{x} と \vec{y} がなす角を θ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) \vec{a} , \vec{b} を \vec{x} , \vec{y} で表せ.
 (2) $\vec{a} + \vec{b}$ を \vec{x} , \vec{y} を用いて表し, $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ を θ で表せ.
 (3) $|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの θ を, それぞれ求めよ.

$$(1) \vec{a} + 2\vec{b} = \vec{x} \cdots \textcircled{1}, \quad 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{y} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \text{ より. } 5\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} \quad \therefore \underline{\underline{\vec{a} = \frac{1}{5}\vec{x} + \frac{2}{5}\vec{y}}} //$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入して. } \underline{\underline{\vec{b} = \frac{2}{5}\vec{x} - \frac{1}{5}\vec{y}}} //$$

$$(2) (1) \text{ より. } \vec{a} + \vec{b} = \frac{3}{5}\vec{x} + \frac{1}{5}\vec{y}, \quad |\vec{x}|^2 = 4, \quad |\vec{y}|^2 = 4$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \frac{9}{25}|\vec{x}|^2 + \frac{1}{25}|\vec{y}|^2 + \frac{6}{25}\vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\text{ここで, } \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos \theta = 4 \cos \theta \text{ より.}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= \frac{36}{25} + \frac{4}{25} + \frac{24}{25} \cos \theta \\ &= \underline{\underline{\frac{8}{5} + \frac{24}{25} \cos \theta}} // \end{aligned}$$

(3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より (2) から

$$\underline{\underline{|\vec{a} + \vec{b}| \text{ の最大値は } \frac{8}{5} \text{ (} \theta = 0^\circ \text{ のとき), 最小値は } \frac{4}{5} \text{ (} \theta = 180^\circ \text{ のとき)}} //$$