000142054975899

# 首都大学東京

2013年 都市教養（理系） 第1問　お待たせしました！

数理 石井K

$\boxed{1}$ 1から10までの番号が1つずつ重複せずに書かれた10枚のカードがあり，左から小さい番号の順に横1列に並べてある．この中から，無作為に2枚のカードを選び，その場所を入れかえる操作を考える．$n$を正の整数として，この操作を$n$回行ったとき，左端にあるカードに書かれている番号が1である確率を$p_n$とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $p_1$を求めなさい．

(2) $n$回目の操作のあと，1が書かれたカードが左端になく，$(n+1)$回目の操作のあとに1が書かれたカードが左端にある確率を$q_n$とするとき，$q_n$を$p_n$を用いて表しなさい．

(3) $p_{n+1}$と$p_n$の間に成り立つ関係式を求めなさい．

(4) $p_n$を$n$を用いて表しなさい．

(1) 入れかえ方の総数は ${}_{10}C_2$ 通り．そのうち1を入れかえないものは ${}_9C_2$ 通りであるから，

$$p_1 = \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{36}{45} = \underline{\frac{4}{5}} \text{〃}$$

(2) $n$回目の操作のあと，1が左端にない確率は $1-p_n$

そのとき1が左から$i$番目にあるとすると $(i \neq 1)$

$(n+1)$回目の操作で 1番目 $\leftrightarrow$ $i$番目を入れかえればよい

$$\therefore q_n = (1-p_n)\cdot\frac{1}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{45}(1-p_n) \qquad \therefore \underline{q_n = \frac{1}{45}(1-p_n)} \text{〃}$$

(3) $(n+1)$回目の操作後 左端が1となるのは，

(i) (2)で考えた場合

(ii) $n$回目の操作後も$(n+1)$回目の操作後も左端が1の場合

$$\therefore p_{n+1} = \frac{1}{45}(1-p_n) + p_n\cdot\frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2}$$

$$\therefore \underline{p_{n+1} = \frac{7}{9}p_n + \frac{1}{45}} \text{〃}$$

(4) (3)より $p_{n+1} - \frac{1}{10} = \frac{7}{9}\left(p_n - \frac{1}{10}\right)$

$b_n = p_n - \frac{1}{10}$ とおきなおすより，速く解ける．この書き方に慣れよう．

$\therefore$ 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{10}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$，公比 $\frac{7}{9}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{p_n = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\left(\frac{7}{9}\right)^n} \text{〃}$$

$\leftarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{10}$ となるのは興味深い．理由を考えよう！